CORRIGE DU CAHIER POUR PREPARER SA RENTREE EN TERMINALE Spécialité MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. $A = \dfrac{3^{27} - 3^{29}}{3^{28}}$

$A = \dfrac{3^{27}\left(1 - 3^2\right)}{3^{27} \times 3}$

$A = \dfrac{1-9}{3}$

$A = -\dfrac{8}{3}$

2. $B = \dfrac{3^{-6} \times 5^5}{(5^2)^3 \times 3^{-5}}$.

$B = 3^{-6} \times 3^5 \times 5^5 \times 5^{-6}$.

$B = 3^{-1} \times 5^{-1}$.

$B = \dfrac{1}{15}$

Exercice n° 2

1. $C = \sqrt{48}$

$C = \sqrt{4^2 \times 3}$

$C = 4\sqrt{3}$

2. $D = \sqrt{36 + 64}$

$D = \sqrt{100}$

$D = 10$

3. $E = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48}$

$E = 5\sqrt{3^2 \times 3} - 3\sqrt{4^2 \times 3}$

$E = 5 \times 3\sqrt{3} - 3 \times 4\sqrt{3}$

$E = 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3}$

$E = 3\sqrt{3}$

Exercice n° 3

1. $H = \dfrac{-2}{\sqrt{7} - 2}$

$H = \dfrac{-2}{\sqrt{7} - 2} \times \dfrac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} + 2}$

$H = \dfrac{-2\sqrt{7} - 4}{\sqrt{7}^2 - 2^2}$

$H = \dfrac{-2\sqrt{7} - 4}{3}$

2. $I = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$

$I = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \times \dfrac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$

$I = \dfrac{\left(1 + \sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right)}{3^2 - \sqrt{5}^2}$

$I = \dfrac{3 + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{4}$

$I = \dfrac{8 + 4\sqrt{5}}{4}$

$I = 2 + \sqrt{5}$

Exercice n° 4

1. $A = -2 \times (5)^{n+1} + 2 \times (5)^n$

$A = 2 \times (5)^n\,(-5 + 1)$

$A - 8 \times 5^n$

2. $B = (n+1) \times 2^{n+1} - n \times 2^n$

$B = 2^n\,(2(n+1) - n)$

$B = 2^n(2n + 2 - n)$

$B = 2^n(n+2)$

Exercice n° 5

$2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

Développer des expressions

Recopie et complète les pointillés.

$A = 2(3x-1)^2 - (5x+3)(2-3x)$

$A = 2(9x^2 - 6x + 1) - (10x - 15x^2 + 6 - 9x)$

$A = 18x^2 - 12x + 2 - 10x + 15x^2 - 6 + 9x$ donc $A = 33x^2 - 13x - 4$

Exercice n° 6

$B = (6x - 4x^2 - 27 + 18x) + 5(4x^2 + 4x + 1)$

$B = 6x - 4x^2 - 27 + 18x + 20x^2 + 20x + 5$

$B = 16x^2 + 44x - 22$

Exercice n° 7

$C = 2(5x-1)^2 + 10x - 2$

$C = 2(5x-1)^2 + 2(5x-1)$

$C = (5x-1)\,(2(5x-1) + 2)$

$C = (5x-1)\,(10x - 2 + 2)$

$C = 10x(5x-1)$

$E = (4x-3)^2 - 25x^2$

$E = (4x-3)^2 - (5x)^2$

$E = ((4x-3) - 5x)\,((4x-3) + 5x)$

$E = (-x-3)\,(9x-3)$

$E = 3(-x-3)(3x-1)$

Exercice n° 8

$B = \dfrac{2x}{3x-1} - 5$

$B = \dfrac{2x}{3x-1} - 5 \times \dfrac{3x-1}{3x-1}$

$B = \dfrac{2x - 5 \times (3x-1)}{3x-1}$

$B = \dfrac{2x - 15x + 5)}{3x-1}$

$B = \dfrac{-13x+5}{3x-1}$

$C = \dfrac{4}{2x+6} - \dfrac{3}{x-5}$

$C = \dfrac{4}{2x+6} \times \dfrac{x-5}{x-5} - \dfrac{3}{x-5} \times \dfrac{2x+6}{2x+6}$

$C = \dfrac{4(x-5) - 3(2x+6)}{(x-5)(2x+6)}$

$C = \dfrac{4x - 20 - 6x - 18)}{2x^2 + 6x - 10x - 30}$

$C = \dfrac{-2x-38}{2x^2-4x-30}$

$C = \dfrac{-x-19}{x^2-2x-15}$

Exercice n° 9

1. $-x = x + 16$

$-2x = 16$

$x = \dfrac{16}{-2} = -8$ donc $S = \{-8\}$

2. $(-x-4)(-x+7) = 0$

$-x - 4 = 0$ ou $-x + 7 = 0$

$x = -4$ ou $x = 7$ donc $S = \{-4; 7\}$

3. $9(-3x-1)(6x-36) = 0$

$-3x - 1 = 0$ ou $6x - 36 = 0$

$-3x = 1$ ou $6x = 36$

$x = -\dfrac{1}{3}$ ou $x = 6$ donc $S = \left\{-\dfrac{1}{3}; 6\right\}$

4. $\dfrac{-3x-1}{8-5x} = 0$

Valeur interdite : $8 - 5x = 0 \iff x = \dfrac{8}{5}$

$\dfrac{-3x-1}{8-5x} = 0 \iff -3x - 1 = 0$ et $x \neq \dfrac{8}{5}$

$\dfrac{-3x-1}{8-5x} = 0 \iff x = -\dfrac{1}{3}$ et $x \neq \dfrac{8}{5}$

$S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

5. $\dfrac{5-8x}{x-2} = 3$

Valeur interdite : $x - 2 = 0 \iff x = 2$

$\dfrac{5-8x}{x-2} - 3 \times \dfrac{x-2}{x-2} = 0$

$\dfrac{(5-8x) - 3 \times (x-2)}{x-2} = 0$

$\dfrac{11-11x}{x-2} = 0$

$\dfrac{11-11x}{x-2} = 0 \iff 11 - 11x = 0$ et $x \neq 2$

$\dfrac{11-11x}{x-2} = 0 \iff x = 1$ et $x \neq 2$

$S = \{1\}$

Exercice n° 10

1. $(5x-1)(x-9) - (x-9)(2x-1) = 0$

$(x-9)\left((5x-1) - (2x-1)\right) = 0$

$(x-9)(5x - 1 - 2x + 1) = 0$

$3x(x-9) = 0$

$3x = 0$ ou $x - 9 = 0$

$x = 0$ ou $x = 9$ donc $S = \{0; 9\}$

2. $(x-1)(2x-7) = 4x^2 - 28x + 49$

$(x-1)(2x-7) = (2x-7)^2$

$(x-1)(2x-7) - (2x-7)^2 = 0$

$(2x-7)\left((x-1) - (2x-7)\right) = 0$

$(2x-7)(x - 1 - 2x + 7) = 0$

$(2x-7)(-x+6) = 0$

$2x - 7 = 0$ ou $-x + 6 = 0$

$x = \dfrac{7}{2}$ ou $x = 6$ donc $S = \left\{\dfrac{7}{2}; 6\right\}$

3. $x + 1 = \dfrac{9}{x+1}$

Valeur interdite : $x + 1 = 0 \iff x = -1$

$x + 1 = \dfrac{9}{x+1} \iff (x+1)^2 = 9$ et $x \neq 1$

$\iff x + 1 = 3$ ou $x + 1 = -3$ et $x \neq 1$

$\iff x = 2$ ou $x = -4$ et $x \neq 1$

$S = \{-4; 2\}$

4. $\dfrac{3x-1}{x-5} = \dfrac{3x-4}{x}$

Valeurs interdites : $x - 5 = 0 \iff x = 5$

$x = 0$

$\dfrac{3x-1}{x-5} = \dfrac{3x-4}{x} \iff x(3x-1) = (x-5)(3x-4)$ et $x \neq 5$ et $x \neq 0$

$\iff 3x^2 - x = 3x^2 - 4x - 15x + 20$ et $x \neq 5$ et $x \neq 0$

$\iff -x + 19x = 20$ et $x \neq 5$ et $x \neq 0$

$\iff x = \dfrac{20}{18} = \dfrac{10}{9}$ et $x \neq 5$ et $x \neq 0$

$S = \{\dfrac{10}{9}\}$

Remarque, dans la question 4, comme on n'a ni facteur commun ni identité remarquable, on développe.

Exercice n° 11

1. $6x^2 - 15x - 9 = 0$

On a $a = 6$, $b = -15$ et $c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \times 6 \times (-9) = 441$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{15-\sqrt{441}}{12}$ et $x_2 = \dfrac{15+\sqrt{441}}{12}$

$x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 3$

$S = \left\{3; -\dfrac{1}{2}\right\}$

2. $\dfrac{1}{8}x^2 + x + 2 = 0$

On a $a = \dfrac{1}{8}$, $b = 1$ et $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times \dfrac{1}{8} \times 2 = 0$

$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution réelle.

$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

$x_0 = -\dfrac{1}{2 \times \frac{1}{8}}$

$x_0 = -4$

$S = \{-4\}$

3. $x^2 + x + 1 = 0$. On a $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

Exercice n°11 bis

Factoriser $A(x) = x^2 + 2x - 3$, et $B(x) = 10x^2 + 3x - 1$

Pour factoriser $A(x) = x^2 + 2x - 3$, On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 16$, $\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines réelles $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -3$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$. Donc pour tout réel x, $A(x) = x^2 + 2x - 3 = a(x - x_1)(x - x_2) = (x+3)(x-1)$

Pour factoriser $B(x) = 10x^2 + 3x - 1$, On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 49$, $\Delta > 0$ le polynôme admet deux racines réelles $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{10}{20} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Donc pour tout réel x, $B(x) = 10x^2 + 3x - 1 = a(x - x_1)(x - x_2) = 10\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = (2x+1)(5x-1)$

Exercice n° 12

1. $6x + 7 > 4x + 8$
$6x - 4x > 8 - 7$
$2x > 1$
$x > \dfrac{1}{2}$
$S = \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

2. $x + 1 \geqslant 9x + 25$
$x - 9x \geqslant 25 - 1$
$-8x \geqslant 24$
$x \leqslant \dfrac{24}{-8}$
$x \leqslant -3$
$S =]-\infty; -3]$

Exercice n° 13

1. $(x-8)(-1-10x) \leqslant 0$

Signe de chaque facteur :

$x - 8 > 0 \iff x > 8$ $\qquad$ $-1 - 10x > 0 \iff x < -\dfrac{1}{10}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{10}$		8		$+\infty$
signe de $x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-x-10$		$+$	0	$-$		$-$	
signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty; -\dfrac{1}{10}\right] \cup [8; +\infty[$

2. $(3x+2)^2 - (3x+2)(5x+1) \leqslant 0$
$(3x+2)\left((3x+2) - (5x+1)\right) \leqslant 0$
$(3x+2)(-2x+1) \leqslant 0$
Signe de chaque facteur :

$3x + 2 > 0 \iff x > -\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $-2x + 1 > 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty; -\dfrac{2}{3}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

Exercice n° 14

1. Puisque $x+y=20$, on a $y=20-x$.
2. $P=xy=x(20-x)$
$P\geqslant 91 \iff x(20-x)\geqslant 91$
$\iff 20x-x^2-91\geqslant 0$
Or $(7-x)(13-x)=91-7x-13x+x^2=x^2-20x+91$.
$P\geqslant 91 \iff -x^2+20x-91\geqslant 0$
$\iff x^2-20x+91\leqslant 0$
$\iff (7-x)(13-x)\leqslant 0$
3. On dresse le tableau de signes de l'expression $R(x)=(7-x)(13-x)$
$7-x>0 \iff x<7$
$13-x>0 \iff x<13$
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		7		13		$+\infty$
signe de $7-x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $13-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x\in[7;13]$ et $y\in[7;13]$ avec $x+y=20$.

Exercice n° 15

1. $\dfrac{3}{2x-7}\leqslant 0$
Valeur interdite : $2x-7=0 \iff x=\dfrac{7}{2}$
Le signe de $\dfrac{3}{2x-7}$ ne dépend que du signe de $2x-7$.
$\dfrac{3}{2x-7}$ est négatif quand $2x-7$ est négatif.
$2x-7<0 \iff x<\dfrac{7}{2}$
$S=\left]-\infty;\dfrac{7}{2}\right[$
2. $5+\dfrac{2}{x+3}\leqslant 0$
Valeur interdite : $x+3=0 \iff x=-3$
$5+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{5(x+3)+2}{x+3}=\dfrac{5x+17}{x+3}$
$5x+17>0 \iff x>-\dfrac{17}{5}$ $\qquad x+3>0 \iff x>-3$
On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{17}{5}$		-3		$+\infty$
signe de $5x+17$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe du quotient		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$S=\left[-\dfrac{17}{5};-3\right[$
3. $\dfrac{3}{2x-1}\geqslant\dfrac{2}{-3x+15}$
Valeurs interdites : $2x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$

$-3x+15=0 \iff x=5$

$$\dfrac{3}{2x-1}\geqslant\dfrac{2}{-3x+15} \iff \dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{2}{-3x+15}\geqslant 0$$

$$\iff \dfrac{3(-3x+15)}{(2x-1)(-3x+15)}-\dfrac{2(2x-1)}{(-3x+15)(2x-1)}\geqslant 0$$

$$\iff \dfrac{3(-3x+15)-2(2x-1)}{(-3x+15)(2x-1)}\geqslant 0$$

$$\iff \dfrac{-13x+47}{(-3x+15)(2x-1)}\geqslant 0$$

$-13x+47>0 \iff x<\dfrac{47}{13}$

$-3x+15>0 \iff x<5$

$2x-1>0 \iff x>\dfrac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{47}{13}$		5		$+\infty$
signe de $-13x+47$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $-3x+15$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe du quotient		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$S=\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{47}{13}\right]\cup\left]5;+\infty\right[$

Exercice n° 16

1. $2x^2-5x-42\geqslant 0$

On a $a=2$, $b=-5$ et $c=-42$.

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times(-42)=361=19^2$

$\Delta>0$ donc il y a deux racines : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{5-19}{4}=-\dfrac{7}{2}$ et $x_2=\dfrac{5+19}{4}=6$

Comme $a=2>0$, les branches de la parabole sont tournées vers le haut et on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		6		$+\infty$
signe de $2x^2-5x-42$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-\infty;\dfrac{7}{2}\right]\cup\left[6;+\infty\right[$

2. $\dfrac{x^2-2x-3}{2x+5}\leqslant 0$

Valeur interdite : $2x+5=0 \iff x=-\dfrac{5}{2}$

Signe de $2x+5$: $2x+5>0 \iff x>-\dfrac{5}{2}$

Signe de x^2-2x-3 : On a $a=1$, $b=-2$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times(-3)=16$

$\Delta>0$ donc il y a deux racines : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{2-4}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{2+4}{2}=3$

Comme $a=2>0$, les branches de la parabole sont tournées vers le haut.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		3		$+\infty$
signe de x^2-2x-3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe du quotient		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-\infty;-\dfrac{5}{2}\right[\cup\left[-1;3\right]$

Exercice n° 17

$A(x)=e^{2x-1}e^{-x+1}$

$A(x)=e^{(2x-1)+(-x+1)}$

$A(x)=e^{x}$

$B(x)=\dfrac{e^{2-x}}{e^{1-2x}}$

$B(x)=e^{(2-x)-(1-2x)}$

$B(x)=e^{x+1}$

$C(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}}$

$C(x)=1+\dfrac{e^{-x}}{e^{x}}$

$C(x)=1+e^{-2x}$

$D(x)=\dfrac{e^{x}e^{y}}{e^{x-y}}$

$D(x)=e^{(x+y)-(x-y)}$

$D(x)=e^{2y}$

$E(x)=\dfrac{e^{2x+3}}{e^{-x}}$

$E(x)=e^{(2x+3)-(-x)}$

$E(x)=e^{3x+3}$

Exercice n° 18

1. $A = 10e^x - 5xe^x$
   $A = 5e^x(2 - x)$

2. $B = e^{2x} - 4e^x$
   $B = e^x\left(e^x - 4\right)$

3. $C = 9e^{2x} - 6e^x + 1$
   $C = (3e^x)^2 - 2 \times 3e^x + 1$
   $C = (3e^x - 1)^2$

4. $D = e^{2x} - 16$
   $D = (e^x)^2 - 4^2$
   $D = (e^x - 4)\left(e^x + 4\right)$

Questions 3 et 4 : On utilise les identités remarquables : pour tous réels a et b,
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ et $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Exercice n° 19

1. $e^{-3x} = e^{x+1} \iff -3x = x + 1$
   $\iff -4x = 1$
   $\iff x = -\dfrac{1}{4}$
   $S = \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$

2. $e^{2x} \leqslant 1 \iff 2x \leqslant 0$ Car $1 = e^0$
   $\iff x \leqslant 0$
   $S =]-\infty; 0]$

3. $e^{-2x} = 0$
   $S = \emptyset$ car la fonction exponentielle ne s'annule pas.

4. $e^x > e \iff x > 1$ Car $e = e^1$
   $S =]1; +\infty[$

5. $e^{x^2} = e^{-5x+6} \iff x^2 = -5x + 6$
   $\iff x^2 + 5x - 6 = 0$
   On a $a = 1$, $b = 5$ et $c = -6$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 49$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
   $x_1 = \dfrac{5 - 7}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{5 + 7}{2} = 6$
   $S = \{-1; 6\}$

6. $e^{-x} \leqslant e^x \iff -x \leqslant x$
   $\iff 2x \geqslant 0$
   $\iff x \geqslant 0$
   $S = [0; +\infty[$

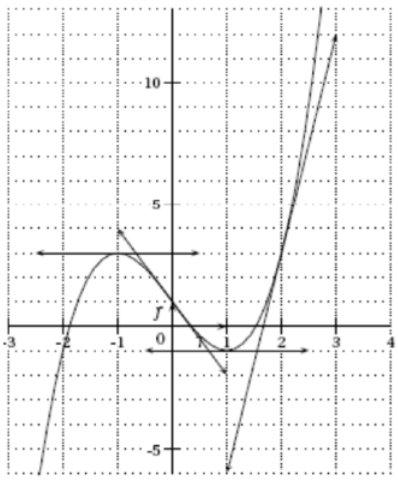
Exercice n° 20

1. La fonction f définie par $f(x) = x^3$ est-elle dérivable en 2 ?
   $f(2) = 2^3 = 8$ et $f(2+h) = (2+h)^3 = 8 + 6h + 6h^2 + h^3$

   $$\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{6h + 6h^2 + h^3}{h} = 6 + 6h + h^2$$

   Quand h tend vers 0, $\tau(h)$ tend vers 6. Car $6h$ et h^2 tendent vers 0
   La limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 est un réel fini donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 6$.

Exercice n° 21

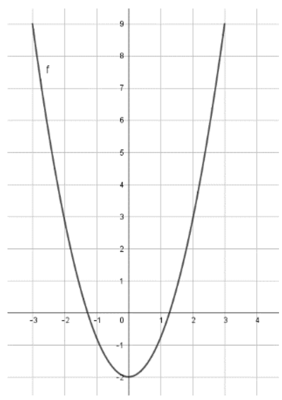


1. Déterminer graphiquement :
   a. $f(0) = 1$; $f(-1) = 3$ et $f(2) = 3$.
   b. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est -3 ;
   Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -1 est 0 ;
   Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est 9.
   c. L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 est $y = 3$
   d. L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0 $y = -3x + 1$

2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1; 26)$.
   Le coefficient directeur de la droite T est $m = \dfrac{26 - (-1)}{1 - (-2)} = 9$.
   Le coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse -2 étant le nombre dérivé $f'(2)$, on en déduit $f'(-2) = 9$
   L'équation de cette droite est de la forme $y = 9x + p$.
   On sait que cette droite passe par le point A donc on doit avoir $y_A = 9x_A + p$.
   Soit $26 = 9 \times 1 + p$ donc $p = 17$.
   L'équation réduite de T est $y = 9x + 17$.

Exercice n° 22

Une courbe possible est donnée ci-contre



Exercice n° 23

1. $f(x) = -x^2$, pour $a = 2$.
$f(2) = -2^2 = -4$ et $f(2+h) = -(2+h)^2 = -4 - 4h - h^2$

$$\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-4h - h^2}{h} = -4 - h^2$$

Quand h tend vers 0, $\tau(h)$ tend vers -4.
La limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 est un réel fini donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = -4$.

2. $f(x) = 2x - 7$, pout tout a dans $\mathbb{R}$. $f(a) = 2a - 7$ et $f(a+h) = 2(a+h) - 7 = 2a - 7 + 2h$

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

Quand h tend vers 0, $\tau(h)$ tend vers 2.
La limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 est un réel fini donc f est dérivable en Ra et $f'(a) = 2$.

3. $f(x) = \frac{1}{x}$, pour $a = 1$. $f(1) = \frac{1}{1} = 1$ et $f(1+h) = \frac{1}{1+h}$

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \frac{1 - (1+h)}{h(1+h)} = \frac{-1}{1+h}$$

Quand h tend vers 0, $\tau(h)$ tend vers -1.
La limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 est un réel fini donc f est dérivable en 2 et $f'(1) = -1$.

Exercice n° 24

1. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x + 7$
$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 6 \times 2x + 5$
$f'(x) = 6x^2 - 12x + 5$

2. $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2+1}$

On pose $u(x) = 4x + 1$ donc $u'(x) = 4$
$v(x) = 2x^2 + 1$ donc $v'(x) = 4x + 1$

$$f'(x) = \frac{4(2x^2+1) - 4x(4x+1)}{(2x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{8x^2 + 4 - 16x^2 - 4x}{(2x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-8x^2 - 4x + 4}{(2x^2+1)^2}$$

3. $f(x) = x^2 e^x$

On pose $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$
$v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2x \times e^x + x^2 \times e^x$
$f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$

4. $f(x) = xe^{-x}$

On pose $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$
$v(x) = e^{-x}$ donc $v'(x) = -e^{-x}$

$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times \left(-e^{-x}\right)$
$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$

5. $f(x) = e^{3x+7}$

On reconnait $x \longmapsto e^{ax+b}$ qui a pour dérivée $x \longmapsto ae^{ax+b}$.
Donc $f'(x) = 3e^{3x+7}$

Question 2, on utilise $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Questions 3 et 4, on utilise $(uv)' = u'v + uv'$

Exercice n° 25

1. Calcul de la fonction dérivée.
f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

2. Etude du signe de la fonction dérivée.
f' est une fonction du second degré avec $a = 6$, $b = -6$ et $c = -36$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900 = 30^2$
$\Delta > 0$ donc il y a 2 racines $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Soit $x_1 = \dfrac{6 - 30}{12} = -2$ et $x_2 = \dfrac{6 + 30}{12} = 3$
Ici $a = 6 > 0$ donc les branches de la parboles sont tournées vers le haut.

3. Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		$\nearrow$	74	$\searrow$	-51	$\nearrow$	

Exercice n° 26

D'après un exercice du *Livre scolaire*

1. M est le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse x.
   Donc $y_M = f(x) = (x+1)e^{-\frac{3}{2}x}$ et $M\left(x;(x+1)e^{-\frac{3}{2}x}\right)$
   On en déduit que $N(x;0)$ et $P\left(0;(x+1)e^{-\frac{3}{2}x}\right)$.
2. L'aire du rectangle $ONMP$ est égale à $ON \times OP$, avec $ON = x$ et $OM = (x+1)e^{-\frac{3}{2}x}$.
   On a donc $\mathscr{A}(x) = x \times (x+1)e^{-\frac{3}{2}x} = (x^2+x)e^{-\frac{3}{2}x}$
3. • Calcul de la fonction dérivée

   On pose $u(x) = x^2 + x$ donc $u'(x) = 2x+1$ on utilise $(uv)' = u'v + uv'$

   $v(x) = e^{-\frac{3}{2}x}$ donc $v'(x) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}$

   $$\begin{aligned}\mathscr{A}'(x) &= (2x+1)e^{-\frac{3}{2}x} + (x^2+x) \times \left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}\right)\\ &= e^{-\frac{3}{2}x}\left(2x+1-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right)\\ &= e^{-\frac{3}{2}x}\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)\end{aligned}$$

• Signe de la dérivée.

☞ Pout tout $x \in [0;3]$, $e^{-\frac{3}{2}x} > 0$

☞ $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times 1 = \frac{25}{4}$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Soit $x_1 = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{-3} = 1$ et $x_2 = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}{-3} = -\frac{2}{3}$

$a = -\frac{3}{2} < 0$ donc les branches de la parabole sont tournées vers le bas.

• Tableau de variations $\mathscr{A}(0) = 0$; $\mathscr{A}(1) = 2e^{-\frac{3}{2}}$ et $\mathscr{A}(3) = 12e^{-\frac{9}{2}}$.

x	0		1		3
signe de $\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de $\mathscr{A}$	0	$\nearrow$	$2e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$12e^{-\frac{9}{2}}$

4. L'aire du rectangle $ONMP$ est maximale pour $x = 1$.

Exercice n° 27

Partie A

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$. Méthode : on développe l'expression de droite et on identifie les coefficients
   $(x-1)\left(ax^2+bx+c\right) = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.
   Or $P(x) = x^3-3x^2+2$ donc $a = 1$, $b-a = -3$, $c-b = 0$ et $c = -2$.
   C'est-à-dire $a = 1$, $b = -2$ et $c = -2$. Ainsi $P(x) = (x-1)\left(x^2-2x-2\right)$
2. Étudier le signe de $P(x)$. $P(x) = (x-1)\left(x^2-2x-2\right)$.
   On étudie le signe de x^2-2x-2 : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12$
   $x_1 = 1+\sqrt{3}$ et $x_2 = 1-\sqrt{3}$ et le trinôme est positif à l'extérieur de ces racines.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1-\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de x^2-2x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B

1. f est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
   $u(x) = x^3 - 3x + 2 \Longrightarrow u'(x) = 3x^2 - 3$ et $v(x) = x - 2 \Longrightarrow v'(x) = 1$
   $f'(x) = \frac{(3x^2-3)(x-2) - (x^3 - 3x + 2)(1)}{(x-2)^2} = \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 - x^3 + 3x - 2}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 4}{(x-2)^2}$
   Donc $f'(x) = \frac{2(x^3 - 3x^2 + 2)}{(x-2)^2} = \frac{2P(x)}{(x-2)^2}$
2. $(x-2)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $P(x)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
variation de f		↘	$9-6\sqrt{3}$	↗	0	↘	‖	↘	$9+6\sqrt{3}$	↗	

3. Il faut faire un tableau de valeurs et placer les points correspondants sur la graphique.
4. On cherche les valeurs de x_0 vérifiant $f'(x) = 0$.
   Donc quand $P(x) = 0$. Il y a 3 valeurs possibles pour x_0 : $1 - \sqrt{3}$, 1 et $1 + \sqrt{3}$.

5. Une équation de la tangente est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 3$.
   $f(3) = 20$ et $f'(3) = 4$ donc $y = 4(x-3) + 20$, bref $y = 4x + 8$.
6. Même méthode qu'à la première question :
   $$x^2 + 2x + 1 + \frac{d}{x-2} = \frac{(x^2 + 2x + 1)(x-2) + d}{x-2} = \frac{x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2 + d}{x-2} = \frac{x^3 - 3x - 2 + d}{x-2}$$
   Or $x^2 + 2x + 1 + \frac{d}{x-2} = f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x-2}$ donc $-2 + d = 2$, d'où $d = 4$.
   Ainsi $f(x) = x^2 + 2x + 1 + \frac{4}{x-2}$.
7. On appelle g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 2x + 1$ et P sa courbe représentative.
   Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de P. Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de P, il faut étudier le signe de $f(x) - (x^2 + 2x + 1)$.
   $f(x) - (x^2 + 2x + 1) = \frac{4}{x-2}$, donc si $x > 2$, la différence est positive (donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{P}$) et si $x < 2$, la différence est négative (donc $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathscr{P}$).

Exercice n° 28

1. L'algorithme 1 affiche 6 valeurs.
   L'algorithme 2 affiche 5 valeurs.
   L'algorithme 3 affiche 1 valeur.

   L'algorithme 4 affiche 1 valeur.

2. Faire tourner, à la main, ces 4 algorithmes.

Les valeurs en bleu et gras sont celles qui sont affichées par l'algo

Algo1			Algo2			Algo 3			Algo 4	
n	u		n	u		n	u		n	u
0	**-1**			2		0	3		0	3
1	**1**		1	**3**		1	4		1	4
2	**3**		2	**5**		2	7		2	7
3	**5**		3	**9**		3	16		3	16
4	**7**		4	**17**		4	**43**		**4**	43
5	**9**		5	**33**						

3. L'algorithme 1 affiche les 6 premiers termes de la suite définie par $u_n = 2n - 1$.

   L'algo2 affiche les termes u_1, u_2, u_3, u_4 *et* u_5 de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$.

   L'algo 3 calcule les termes de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$ tant qu'ils sont strictement inférieurs à 20 et affiche le premier terme de la suite qui est supérieur ou égal à 20

L'algo 4 calcule les termes de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$ tant qu'ils sont strictement inférieurs à 20 et affiche le premier rang à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à 20

4. Dire s'il s'agit de suites définies par une formule explicite ou par une relation de récurrence. La première suite est définie par une formule explicite, les 3 autres sont définies par une relation de récurrence.

Exercice n° 29

1. $u_n = u_0 + nr$ donc $u_n = 8 + 3n$

2. $u_{12} = 8 + 3 \times 12 = 44$

3. $S = 8 + (8+3) + (8+2\times 3) + (8+3\times 3) + \cdots + (8+12\times 3)$
$S = 13 \times 8 + 3(0+1+2+\cdots+12)$

$S = 104 + 3 \times \dfrac{12 \times 13}{2}$

$S = 104 + 234 = 338$

Exercice n° 30

1. $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 3 \times 2^n$

2. $u_9 = 3 \times 2^9 = 1536$

3. $S = 3 + 3\times 2 + 3\times 2^2 + 3\times 2^3 + \cdots + 3\times 2^9$
$S = 3\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9\right)$

$S = 3 \times \dfrac{1-2^{10}}{1-2}$

$S = 3 \times \dfrac{-1023}{-1} = 3069$

Exercice n° 31

1. $d_2 = 50 \times \left(1 - \dfrac{1}{100}\right) = 49,5$
$d_3 = 49,5 \times 0,99 = 49,005$

2. $d_{n+1} = 0,99d_n$
On en déduit que le suite (d_n) est géométrique de raison $q = 0,99$ et de premier terme $d_1 = 50$.

3. $d_n = d_1 \times q^{n-1}$ soit $d_n = 50 \times 0,99^{n-1}$.

4. $L_n = 50 + 50\times 0,99 + 50 \times 0,99^2 + \cdots + 50 \times 0,99^{n-1}$
$L_n = 50\left(1 + 0,99 + 0,99^2 + \cdots + 0,99^{n-1}\right)$

$L_n = 50 \times \dfrac{1-0,99^n}{1-0,99}$

$L_n = 50 \times \dfrac{1-0,99^n}{0,01}$

$L_n = 5\ 000\,(1 - 0,99^n)$.

Exercice n° 32

D'après Manuel *Techmaths Editions Nathan 2019*

Partie A

1. En 2019, on pouvait pêcher 600 tonnes de cabillaud.
En 2020, on peut pêcher 570 tonnes.
Et en 2021, ce sera 540 tonnes.

2. On a donc $u_0 = 600$ et $u_1 = 570$.

3. D'une année à l'autre, le quota de cabillauds pouvant être pêché diminue de 30 tonnes donc $u_{n+1} = u_n - 30$
On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -30$ et de premier terme $u_0 = 600$.

4. $u_{10} = u_0 - 30 \times 10 = 300$.
Cela signifie qu'en 2029, le quota de pêche sera de 300 tonnes.

5. Utilisation du tableur

a. `=B2-30`

b. `=C2+B3`

c. Recopier et compléter le tableau, à la calculatrice ou à l'aide d'un tableur.

d. La quantité totale de cabillaud, en tonnes, pêchée entre 2019 et 2029 est de 4 950 tonnes.

e. Le stock de cabillaud étant de 5 000 tonnes, il est évident qu'en 2029, le stock sera totalement épuisé.

	A	B	C
1	n	u(n)	total
2	0	600	600
3	1	570	1170
4	2	540	1710
5	3	510	2220
6	4	480	2700
7	5	450	3150
8	6	420	3570
9	7	390	3960
10	8	360	4320
11	9	330	4650
12	10	300	4950
13	11	270	5220
14	12	240	5460

Partie B

1. D'une année à l'autre le stock augmente de 12%, il est donc multiplié par $1 + \dfrac{12}{100} = 1,12$ mais il est aussi diminué de 500 tonnes.
$v_1 = v_0 \times 1,12 - 500 = 5\ 000 \times 1,12 - 500 = 5\ 100$.
$v_2 = v_1 \times 1,12 - 500 = 5\ 100 \times 1,12 - 500 = 5212$.

2. $v_3 = v_2 \times 1,12 - 500 = 627,2 \times 1,12 - 500 = 5\ 337,44$.

3. On a $v_{n+1} = 1,12v_n - 500$.

a. L'algorithme affiche la valeur de v_9.
$v_8 = v_7 \times 1,12 - 500 = 6\ 009 \times 1,12 - 500 = 6\ 230,08$
$v_9 = v_8 \times 1,12 - 500 = 6\ 230,08 \times 1,12 - 500 = 6\ 477,6896$

b. Cela signifie que, dans ce modèle, le stock de cabillaud en 2028 sera de presque 6 500 tonnes. Le stock augmente.